TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

TOBB-ETÜ, MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2017-2018 BAHAR DÖNEMİ
MAT 104, GENEL MATEMATİK II, ARA SINAVI
28 ŞUBAT 2018

Adı Soyadı: No: İMZA:

CEVAP ANAHTARI

1. (20 p.)	2. (20 p.)	3. (20 p.)	4. (20 p.)	5. (20 p.)	TOPLAM

NOT: Tam puan almak için yeterli açıklama yapılması gerekmektedir. Sınav süresi 110 dakikadır. Başarılar.

1. Aşağıda verilen integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx$ (10 puan)

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_e^t \frac{1}{x(\ln(x))^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_{\ln e}^{\ln t}\frac{du}{u^3}$$

[değişken değiştirelim $\ln x = u$, $\frac{1}{x}dx = du$]

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{2u^2}\Big|_1^{\ln t}\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{2(\ln t)^2}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

(b) $\int_0^1 xe^x dx$ (10 puan)

[Kısmi integrasyon ile
$x = u$ $\quad e^x dx = dv$
$dx = du$ $\quad e^x = v$]

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - (e-1)$$

$$= 1$$

2. $y' + ycosx = 0$ diferensiyel denkleminin değişkenlerine ayrılabilir olduğunu gösteriniz ve çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y\cos x$$

$$-\frac{1}{y}\,dy = \cos x\,dx$$

olup diferensiyel denk değişkenlerine ayrılabilird

her iki yanın integralini alalım.

$$-\int \frac{1}{y}\,dy = \int \cos x\,dx$$

$$-\ln y = \sin x + c$$

$$y = e^{-(\sin x + c)}$$

$$y = e^{-\sin x} + c$$

//

3. Aşağıdaki serilerin yakınsak olup olmadığını gösteriniz.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{5^n}$ (10 puan)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{5^n} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ olup bu seri bir geometrik seridir.

O halde $r = \frac{2}{5}$ olup $|r| = \frac{2}{5} < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

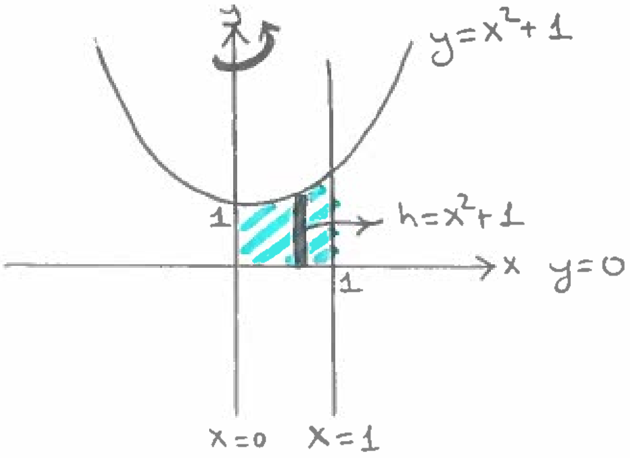
(b) $\sum_{n=3}^{\infty} (1 - \frac{2}{n})^{n^2}$ (YOL:Kök testinden yararlanabilirsiniz)(10 puan)

Kök testi uygulayalım;

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} = \frac{1}{e^2} < 1$ olduğundan

kök testi şartları gereğince seri yakınsaktır.

4. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$ ve $x = 1$ eğrileri ile sınırlı bölgenin grafiğini çiziniz ve bu bölgenin y-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini kabuk yöntemi ile bulunuz.



Kabuk Metodu ile

$$V = \int_{x=0}^{1} 2\pi x . (x^2+1)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x^3 + x)\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right]$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 0 \right]$$

$$= \frac{3\pi}{2}$$ //

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-5)^k}{k.3^k}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı ve yakınsaklık aralığını belirleyiniz.

oran testi uygulayalım :

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{(x-5)^{k+1}}{(k+1).3^{k+1}} \cdot \frac{k.3^k}{(x-5)^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|x-5|}{3} \cdot \frac{k}{k+1}$$

$$= \frac{|x-5|}{3} < 1 \Rightarrow |x-5| < 3$$

$$\Rightarrow 2 < x < 8$$

Şimdi bulunan aralığın uç noktalarını inceleyelim.

- $x=2$ iken,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k.3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k.3^k}{k.3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Alterne seri testinden

$b_k = \frac{1}{k}$, i) $b_k > 0$ olup pozitif

ii) $\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} < 0$ olup b_k azalan

iii) $\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ dır.

O halde $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ serisi yakınsaktır.

- $x=8$ iken,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k.3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

harmonik seri olup p-testi gereğince seri ıraksaktır.

O halde yakınsaklık aralığı $[2,8)$ dır.

yakınsaklık yarıçapı ise $R=3$ tür.